TD n°12: Théorie du potentiel

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

N'hésitez pas à m'écrire si vous trouvez une erreur dans la correction ou si vous voulez une clarification !

On admettra le théorème suivant, qui sera vu au début du prochain cours :

Théorème (Caractérisation du potentiel logarithmique)**.** *Soit $g : \mathbb{C} \to [-\infty, \infty[$ une fonction semi-continue supérieurement telle que*

(i) g est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus K$,

(ii) $g(z) = \log|z| + O(1)$ quand $z \to \infty$,

(iii) $g(z) \to 0$ quand $z \to \zeta \in \partial K$ pour ζ en dehors d'un ensemble polaire.

Alors

$$g = U_{\mu_K} - I(\mu_K).$$

Une telle fonction est appelée fonction de Green de $\mathbb{C} \setminus K$.

Potentiels et énergie.

Exercice 1. Inégalités énergie-potentiel.
Soit K un compact de $\mathbb{C}$, μ_K sa mesure d'équilibre. Soit également ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{C}$.

1. On exploite le fait que $\nu(\mathbb{C}) = \nu(K) = 1$, et on écrit

$$\begin{aligned}\inf_K U_\nu &= \int_K \int_K U_\nu d\nu \\ &\leqslant \int_K U_\nu d\nu \\ &\leqslant I(\mu_K)\end{aligned}$$

où la dernière inégalité est justifiée par $I(\mu_K) = \sup_{\nu \in \mathcal{P}(K)} I(\nu)$.

2. Commençons par un lemme très utile : si μ, ν sont deux mesures boréliennes à support compact dans $\mathbb{C}$, alors

$$\int U_\nu d\mu = \int U_\mu d\nu.$$

Il s'agit en fait simplement d'une application de Fubini :

$$\int U_\nu d\mu = \iint \log|z - w| d\nu(z) d\mu(w) = \int U_\mu d\nu.$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned}\sup_K U_\nu &= \int_{\mathbb{C}} \sup_K U_\nu d\mu_K \\ &\geqslant \int_{\mathbb{C}} U_\nu d\mu_K \\ &\geqslant \int_{\mathbb{C}} U_{\mu_K} d\nu.\end{aligned}$$

Par le théorème de Frostman, $\inf U_{\mu_K} = I(\mu_K)$, et par conséquent $\int_{\mathbb{C}} U_{\mu_K} d\nu \geqslant I(\mu_K)\nu(\mathbb{C})$.

Exercice 2. Quelques potentiels.

1. Dans le cas $|z| > 1$, on applique simplement la formule de la moyenne à la fonction $w \mapsto \log|z-w|$, qui est définie au voisinage du disque unité car $|z| > 1$, et on obtient

$$\int_0^{2\pi} \log|z - e^{i\theta}| d\theta = 2\pi \log|z|.$$

Pour le cas $|z| < 1$, on écrit $\log|z-w| = \log|1-w/z| + \log|z|$, et il suffit alors de prouver que

$$\int_0^2 \pi \log|1 - e^{i\theta}/z| d\theta = 2\pi \log|1/z|.$$

En remarquant que $\log|1-e^{i\theta}/z| = \log|e^{-i\theta} - 1/z|$ et en faisant un changement de variable $\theta \to -\theta$, on se retrouve avec l'intégrale

$$\int \log|e^{i\theta} - 1/z| d\theta = 2\pi \log|1/z|$$

par la première partie de la question.
Le cas $|z| = 1$ est réglé par la continuité en z de l'intégrale.
Reste à calculer le potentiel de $\mu_{a,R}$, qui est donné par

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|z - a - Re^{i\theta}| d\theta &= \log(R) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|z/R - a/R - e^{i\theta}| d\theta \\ &= \log(R) + \log^+ \left|\frac{z-a}{R}\right| \\ &= \max\left(\log(R), \log|z-a|\right).\end{aligned}$$

2. On intègre en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}U_\mu(z) &= \int_{\mathbb{D}} \log|z-w| d\mu(w) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \log|z - re^{i\theta}| d\theta r dr \\ &= \int_0^1 2\pi \max(\log(r), \log|z|) r dr.\end{aligned}$$

Si $|z| \geqslant 1$, alors $\max(\log(r), \log|z|) = \log|z|$ et l'intégrale s'évalue à $\pi \log|z|$. Si $|z| < 1$, il faut découper l'intégrale :

$$U_\mu(z) = 2\pi \int_0^{|z|} r \log|z| dr + \int_{|z|}^1 r \log(r) dr.$$

La première intégrale s'évalue à $\pi|z|^2 \log|z|$, pour la deuxième on peut déterminer que $\pi r^2 \log(r) - \frac{\pi r^2}{2}$ est une primitive, et la deuxième intégrale s'évalue donc à $-\frac{\pi}{2} - \pi|z|^2 \log|z| + \frac{\pi|z|^2}{2}$.
En additionnant tout, on trouve

$$U_\mu(z) = \pi \log^+|z| + \min\left(\frac{\pi}{2}(|z|^2 - 1), 0\right).$$

Ce n'était pas demandé, mais on peut utiliser ce calcul explicite pour calculer l'énergie de μ.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} U_\mu(z) d\mu(z) &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 - 1) d\theta r dr \\ &= \pi^2 \int_0^1 (r^3 - r) dr \\ &= -\frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

μ n'est pas exactement une mesure de probabilité vu que sa masse est π. On a $I(\mu/\pi) = I(\mu)/\pi^2 = -\frac{1}{4}$ qui est bien inférieure à $I(\mu_{0,1}) = 0$.

Exercice 3. Inégalité dans le théorème de Frostman.
Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et $E \subseteq \mathbb{C} \setminus K$ polaire tel que $K' = K \cup E$ est compact. Soient $\mu_K, \mu_{K'}$ les mesures d'équilibre de K, K'.

1. Comme K est non-polaire, il admet une unique mesure d'équilibre μ_K. Cette mesure est supportée dans K' et a une énergie $> -\infty$, donc K' est non-polaire et $\mu_{K'}$ est bien unique, d'énergie $> -\infty$.

2. On procède par l'absurde. Si jamais $\mu_{K'}(E) > 0$, alors $\frac{1}{\mu(E)}\mu|_E$ est une mesure non-nulle sur E, et alors son énergie est $-\infty$.
Il suffit alors de vérifier que
$$\int_{K'}\int_{K'} = \int_K\int_K + \int_K\int_E + \int_E\int_K + \int_E\int_E$$
où l'intégrande est supposé être $\log|z-w|d\mu_{K'}(z)d\mu_{K'}(w)$. Si la dernière intégrale vaut $-\infty$ alors la somme vaut $-\infty$, ce qui contredit $I(\mu_{K'}) > -\infty$.
La mesure d'équilibre de K' est donc supportée sur K, et elle donc égale à μ_K.

3. Si $K = \overline{\mathbb{D}}$, la mesure d'équilibre est la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle, son potentiel est $\log^+|z|$ et son énergie est 0.
Etant donné que E est disjoint de $\overline{\mathbb{D}}$, $\log^+|z| > 0$ pour $z \in E$.

Capacités et diamètres transfinis.

Exercice 4. Quelques capacités.
Pour cet exercice, on admet le résultat de l'exercice 7.

1. L'anneau $A_{r,R}$ contient le cercle de rayon R et est contenu dans le disque fermé de rayon R. Comme la capacité est croissante, on a
$$R \leqslant \operatorname{Cap}(A_{r,R}) \leqslant R.$$

2. On écrit $H = q^{-1}([0,1])$, avec $q(z) = z^n$. L'application de la formule de l'exercice 7 donne
$$\operatorname{Cap}(H) = \operatorname{Cap}([0,1])^{\frac{1}{n}}.$$
Remarquons que l'on peut calculer la capacité de $[0,1]$ avec ce résultat : en effet, pour $n = 2$ on a $H = [-1,1]$. La capacité étant invariante par translation, on a $\operatorname{Cap}(H) = \operatorname{Cap}([0,2]) = 2\operatorname{Cap}([0,1])$. On en conclut que $2\operatorname{Cap}([0,1]) = \sqrt{\operatorname{Cap}([0,1])}$, ce qui implique $\operatorname{Cap}([0,1]) = 0$ ou $\operatorname{Cap}([0,1]) = 1/4$. On verra dans l'exercice suivant que $\operatorname{Cap}([0,1]) > 0$.

3. Il suffit d'appliquer la formule et d'écrire
$$\operatorname{Cap}(K) = \operatorname{Cap}(q^{-1}(K)) = \left(\frac{\operatorname{Cap}(K)}{|a_d|}\right)^{\frac{1}{d}}.$$
Cette équation a deux solutions réelles, à savoir 0 et $|a_d|^{-\frac{1}{d-1}}$, ce qui conclut.

4. On admet (c'est une généralisation du raisonnement fait dans un TD précédent) que $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ envoie $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(0,r)$, $r > 1$, sur $\mathbb{C} \setminus E_{a,b}$, où $E_{a,b}$ est l'ellipse de demi-axes $a = r + 1/r$, $b = r - 1/r$, c'est-à-dire définie par $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leqslant 1$.
Pour calculer la capacité d'une ellipse générale $E_{a,b}$ avec $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, on peut commencer par supposer $a > b$ par symétrie rotationnelle. Ensuite, on peut remarquer qu'il existe $r > 1, s > 0$ tels que $a = s\left(r + \frac{1}{r}\right)$, $b = s\left(r - \frac{1}{r}\right)$. r est donné par l'équation $\frac{a}{b} = \frac{r^2+1}{r^2-1}$ (qui admet toujours une unique solution $r > 1$), et s se trouve comme $a/(r + 1/r)$. Comme $\operatorname{Cap}(sK) = s\operatorname{Cap}(K)$, il suffit de calculer $\operatorname{Cap}(E_{a,b})$ pour $a = r + \frac{1}{r}$, $b = r - \frac{1}{r}$.
Pour ce faire, on utilise la caractérisation du potentiel logarithmique. Soient U, V les complémentaires de $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$ et $E_{a,b}$ respectivement. Soient g_U, g_V les fonctions de Green de U et V, et $\varphi(z) = z + \frac{1}{z}$: on va montrer que $g_V \circ \varphi = g_U$.
Pour ce faire, on utilise la caractérisation de la fonction de Green. Comme g_V est harmonique, $g_V \circ \varphi$ est harmonique. On a ensuite $g_V(\varphi(z)) = \log|\varphi(z)| + O(1)$. On vérifie sans encombre que $\log|z + 1/z| =$

$\log|z| + \log|1 + 1/z^2| = \log|z| + o(1)$, et donc $g_V(\varphi(z)) = \log|z| + O(1)$.
Finalement, comme φ envoie $\partial\overline{\mathbb{D}}(0,r)$ sur $\partial E_{a,b}$ et que $g_V(w) \to 0$ quand $w \to$ un point de $\partial E_{a,b}$ (sauf éventuellement sur un ensemble polaire), on a bien $g_V(\varphi(z)) \to 0$ quand $z \to \zeta \in \partial\overline{\mathbb{D}}(0,r)$. On en conclut que $g_V \circ \varphi = g_U$. On sait que $g_U(z) = \log|z| - \log(r) + o(1)$, et $g_U(\varphi(z)) = \log|z| + o(1) - \log \mathrm{Cap}(E_{a,b}) + o(1)$, donc

$$\mathrm{Cap}(E_{a,b}) = r = \frac{a+b}{2}.$$

Ceci conclut.

Exercice 5. Inégalités de diamètres transfinis.

1. On a

$$\tau(Y) = \lim_{n\to\infty} \sup_{y_1,\dots,y_n} \left(\prod_{i<j} d_Y(y_i, y_j)\right)^{\frac{2}{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \sup_{x_1,\dots,x_n} \left(\prod_{i<j} d_Y(f(x_i), f(y_j))\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

car f est surjective. En écrivant $d_Y(f(x_i), f(y_j)) \leqslant A d_X(x_i, y_i)$, on trouve bien $\tau(Y) \leqslant A\tau(X)$.

2. On considère $[0,1] \to \mathbb{T}$ donnée par $t \mapsto e^{2i\pi t}$. C'est une application surjective, et elle vérifie

$$|e^{2i\pi s} - e^{2i\pi t}| = \sqrt{2 - 2\cos(2\pi(s-t))} \leqslant 2\pi|s-t|$$

car $\cos(\theta) \geqslant 1 - \frac{\theta^2}{2}$. L'exponentielle est 2π-lipschitzienne, et donc $1 = \tau(\mathbb{T}) \leqslant 2\pi\tau([0,1])$.

Exercice 6. Capacité et mesure de Lebesgue.
Soit μ une mesure borélienne à support compact sur $\mathbb{C}$ vérifiant $I(\mu) > -\infty$ et E un borélien de $\mathbb{C}$.

1. (a) On utilise la régularité inférieure de μ, qui dit que $\mu(E) = \sup_{K\subseteq E} \mu(K)$. On trouve donc K vérifiant $\mu(K) > 0$.
   Pour démontrer que $I(\mu|_K) \geqslant I(\mu) - \mu(\mathbb{C})^2 \log(d) + \mu(K)^2 \log(d)$, on remarque tout d'abord que $\log\left|\frac{z-w}{d}\right| \leqslant 0$ pour $z, w \in \mathrm{Supp}(\mu)$. Il s'ensuit que

$$\iint_{K\times K} \log\left|\frac{z-w}{d}\right| d\mu(z)d\mu(w) \geqslant \iint_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} \log\left|\frac{z-w}{d}\right| d\mu(z)d\mu(w).$$

   Le terme de gauche est $I(\mu|_K) - \log(d)\mu(K)^2$ et celui de droite est $I(\mu) - \mu(\mathbb{C})^2$.

   (b) Comme $I(\mu) > -\infty$, on a $I(\mu|_K) > -\infty$. Comme $\mu|_K$ n'est pas nulle, on trouve que K n'est pas polaire, et donc E non plus.

2. Il suffit en vertu du résultat ci-dessus de vérifier que $\lambda_{\mathbb{C}}|_{\overline{\mathbb{D}}(0,R)}$ a une énergie non-nulle pour tout R, car $\lambda_{\mathbb{C}}(B) = \limsup_{R\to\infty} \lambda_{\mathbb{C}}(B \cap \overline{\mathbb{D}}(0,R))$.
   Ce fait a déjà été vérifie à l'exercice 2. Pareil pour la mesure de Lebesgue du cercle, et pour celle de $\mathbb{R}$ il faut considérer des intervalles de plus en plus grands, et on peut prouver sans trop de peine que l'énergie d'un intervalle est positive (ça découle de l'intégrabilité du log).

Exercice 7. Capacité d'une image inverse par un polynôme.
Soit $q(z) = a_d z^d + \dots + a_0$ un polynôme à coefficients complexes, $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact non-polaire. On note $U = \mathbb{C} \setminus K$, $V = \mathbb{C} \setminus q^{-1}(K)$. On note respectivement g_U et g_V les fonctions de Green de U et V.

1. $q(V) = U$ est vrai par construction, et on sait que $q(q^{-1}(K)) = K$ car q est surjective (c'est le théorème de d'Alembert-Gauss).
   On commence par démontrer que $q(\partial q^{-1}(K)) \subseteq \partial K$. On a que $\partial q^{-1}(K) = \overline{V} \cap q^{-1}(K)$ et $\partial K = \overline{U} \cap K$. Comme q envoie V dans U, elle envoie $\overline{V}$ dans $\overline{U}$. On a alors

$$q(\overline{V} \cap q^{-1}(K)) \subseteq q(\overline{V}) \cap K \subseteq \overline{U} \cap V = \partial K.$$

   Comme q est ouverte, on a également $q^{-1}(\partial K) \subseteq \partial q^{-1}(K)$ (voir par exemple le TD 6, exercice 9), et en appliquant q, $q(q^{-1}(\partial K)) = \partial K \subseteq q(\partial q^{-1}(K))$, ce qui conclut.

2. La composée d'une fonction harmonique par une fonction holomorphe reste harmonique. Reste à voir $g_U \circ q \to 0$ sur le bord.
C'est une conséquence directe de $q(\partial q^{-1}(K)) \subseteq \partial K$: comme g_V est une fonction de Green de V, $g_U(z) \to 0$ partout sur ∂K sauf sur un ensemble polaire E, et donc $g_U(q(z)) \to 0$ sauf sur $q^{-1}(E)$. Il faut vérifier que $q^{-1}(E)$ est polaire pour E polaire. Soit $F = q^{-1}(E)$, on a $q(F) = E$. On sait que $q : q^{-1}(K) \to K$ est localement Lipschitz (car dérivable), elle est donc globalement Lipschitz, de constante A. D'après l'exercice 5, on a donc

$$\tau(F) \leqslant A\tau(q(F)) = 0$$

et donc $\tau(F) = \mathrm{Cap}(F) = 0$.

3. Il suffit de vérifier que $\log|q(z)| = d\log|z| + \log|a_d| + o(1)$, et donc $\frac{1}{d}g_U(q(z))$ vérifie toutes les conditions pour être la fonction de Green de V.

4. $\log \mathrm{Cap}(K) = I(\mu_K)$.

5. On écrit $g_V(z) = \log|z| - \log \mathrm{Cap}(q^{-1}(K)) + o(1)$, et $g_U(q(z)) = \log|q(z)| - \log \mathrm{Cap}(K)) + o(1) = d\log|z| + \log|a_d| - \log \mathrm{Cap}(K) + o(1)$. L'égalité $g_U(q(z)) = dg_V(z)$ devient alors

$$-d\log \mathrm{Cap}(q^{-1}(K)) = \log|a_d| - \log \mathrm{Cap}(K)$$

qui devient exactement l'égalité voulue après division par d et exponentiation.